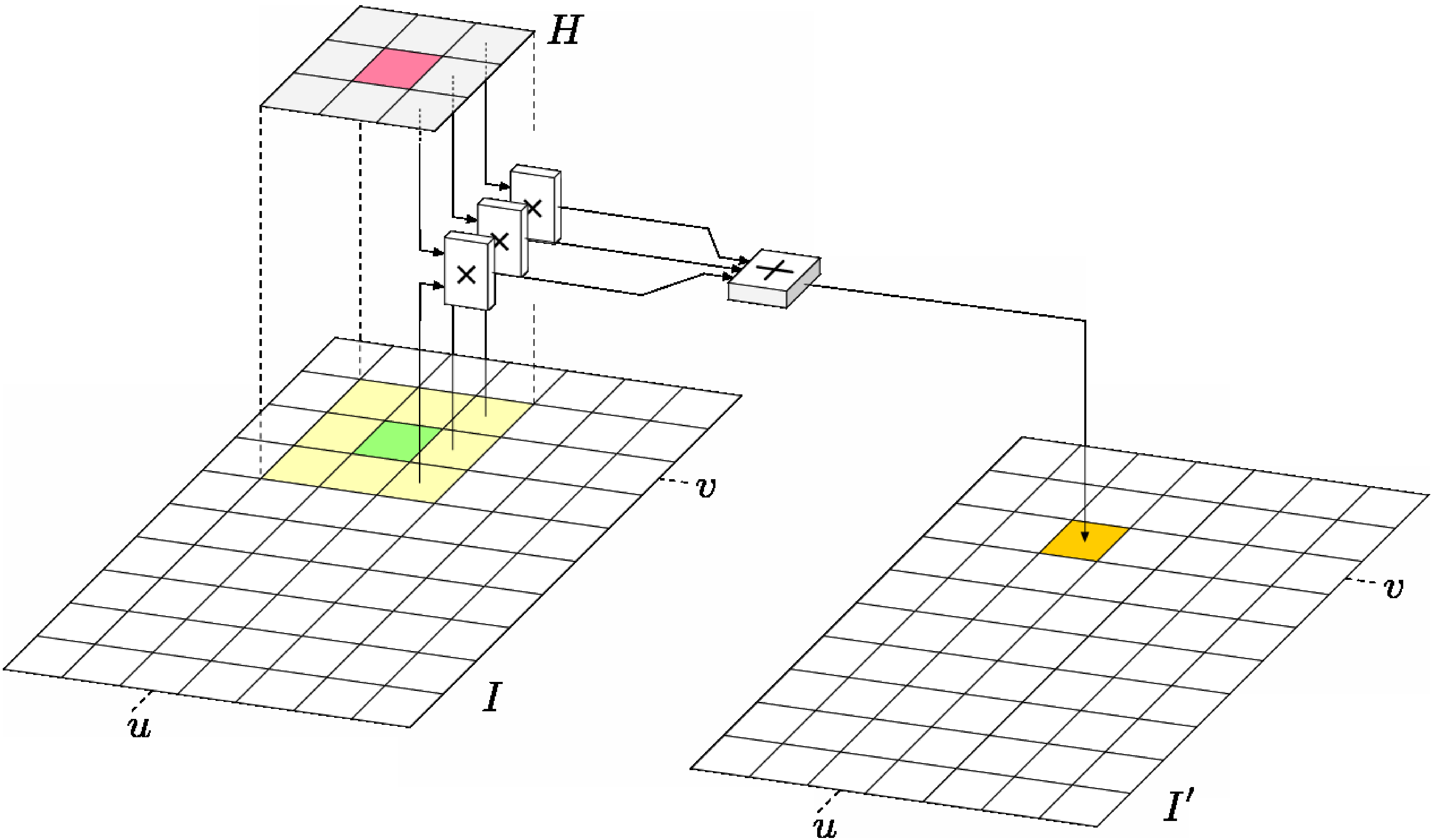
Processamento de Imagem

Convolução
Filtragem no Domínio da Frequência (Fourier)

Professora Sheila Cáceres

Lembrando Filtragem



Correlação

- A correlação e a convolução sãos dois conceitos relacionados a filtragem. Basicamente são a expressão formal da filtragem.
- A correlação de um sinal unidimensional f com um filtro (ou máscara) w pode ser expressa como

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(x) = \sum_{i=\lfloor -m/2 \rfloor}^{\lfloor m/2 \rfloor} w(i)\, f(x+i)$$

- Para o caso bidimensional (imagem e filtro possuem agora duas dimensões).

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(x,y) = \sum_{i=\lfloor -m/2 \rfloor}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{j=\lfloor -n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} w(i,j)\, f(x+i, y+j)$$

- Seleciona-se um filtro com um número impar de elementos tal que o centro do filtro esteja localizado sobre o pixel sob consideração na imagem.

Convolução

- É similar a correlação com a diferença de que o filtro w deve sofrer uma reflexão (ou uma rotação de 180 graus) antes de ser aplicado à imagem.
- Por exemplo, o resultado da convolução de uma imagem unidimensional com o filtro (2,7,8) é exatamente o mesmo que a correlação com o filtro (8, 7, 2).

Convolução

- A convolução de um sinal unidimensional f com um filtro w pode ser expressa como

$$\mathbf{w} * \mathbf{f}(x) = \sum_{i=\lfloor -m/2 \rfloor}^{\lfloor m/2 \rfloor} w(i)\, f(x-i)$$

- Na convolução bidimensional, os pesos do filtro devem ser refletidos tanto na horizontal quanto na vertical

$$\mathbf{w}(x,y) * \mathbf{f}(x,y) = \sum_{i=\lfloor -m/2 \rfloor}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{j=\lfloor -n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} w(i,j)\, f(x-i, y-j)$$

- Deve-se notar que a correlação e a convolução são idênticas quando o filtro é simétrico

Convolução

Algoritmo 3 Processo de convolução de uma imagem

Entrada: imagem **f** de $M \times N$ pixels e uma máscara **w** de $m \times n$ pixels.
Saída: imagem **g** de $M \times N$ pixels.

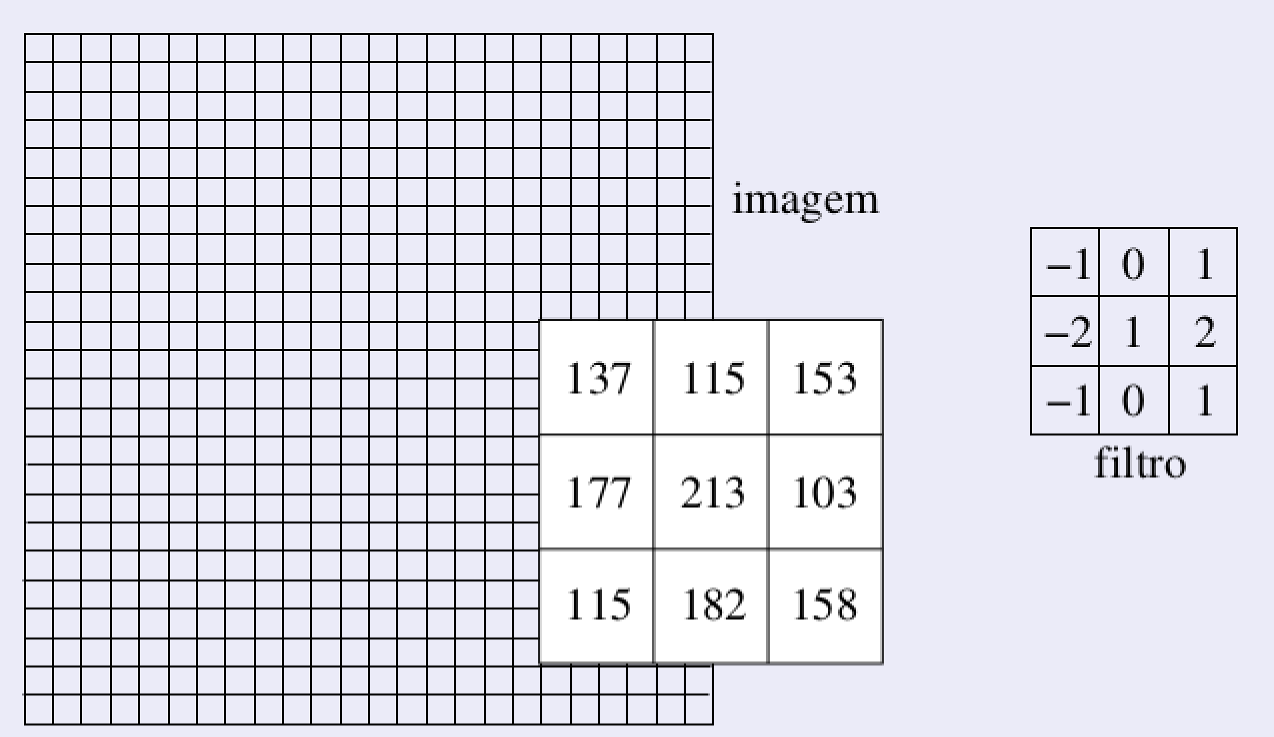
$x1 = \lfloor m/2 \rfloor$
$y1 = \lfloor n/2 \rfloor$
for $x = 0$ até $M - 1$ **do**
    for $y = 0$ até $N - 1$ **do**
        soma $= 0$
        for $i = -x1$ até $x1$ **do**
            for $j = -y1$ até $y1$ **do**
                soma $=$ soma $+ w(i,j) * f(x-i, y-j)$
            end for
        end for
        $g(x,y) =$ soma
    end for
end for

Correlação e Convolução

- Na operação de filtragem, deve;se calcular os pontos pertencentes à borda de modo diferente dos demais, já que estes não dispõem de todos os vizinhos.
- Por questões de simetria, tipicamente são utilizadas janelas quadradas de n x n pixels em que n é um número impar.
- Por questões de eficiência computacional, normalmente são selecionados valores pequenos para n.

Exercício

- Seja a imagem e o filtro de correlação mostrado a direita:



Calcule o resultado da correlação e convolução para o pixel da região em destaque

Fourier
Dominio da frequencia

BREVE HISTÓRIA DAS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER

- O matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 1768.

  - Fourier é lembrado pela teoria desenvolvida em 1807 e publicada em 1822 no livro, La Théorie Analitique de la Chaleur (A Teoria Analítica do Calor).

- A contribuição de Fourier: qualquer função periódica pode ser expressa como soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, cada uma multiplicada por um coeficiente diferente.

  - A Fig. 4.1 mostra uma função composta pela soma de quatro funções.

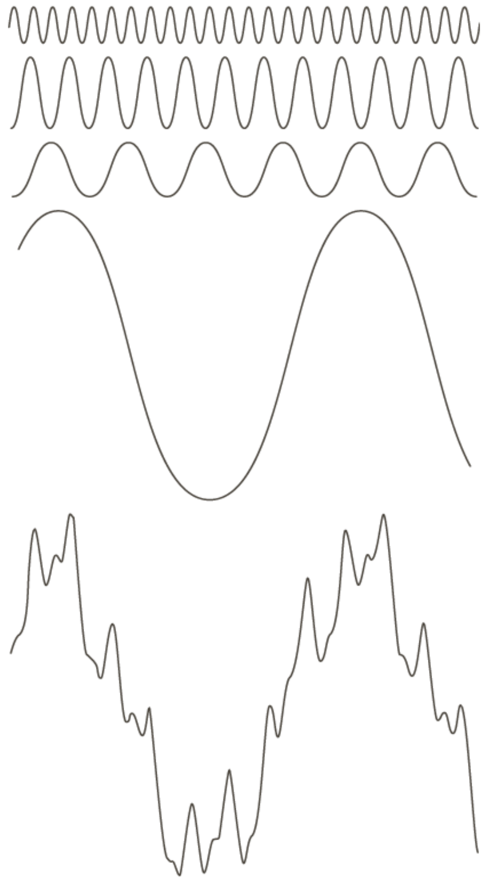
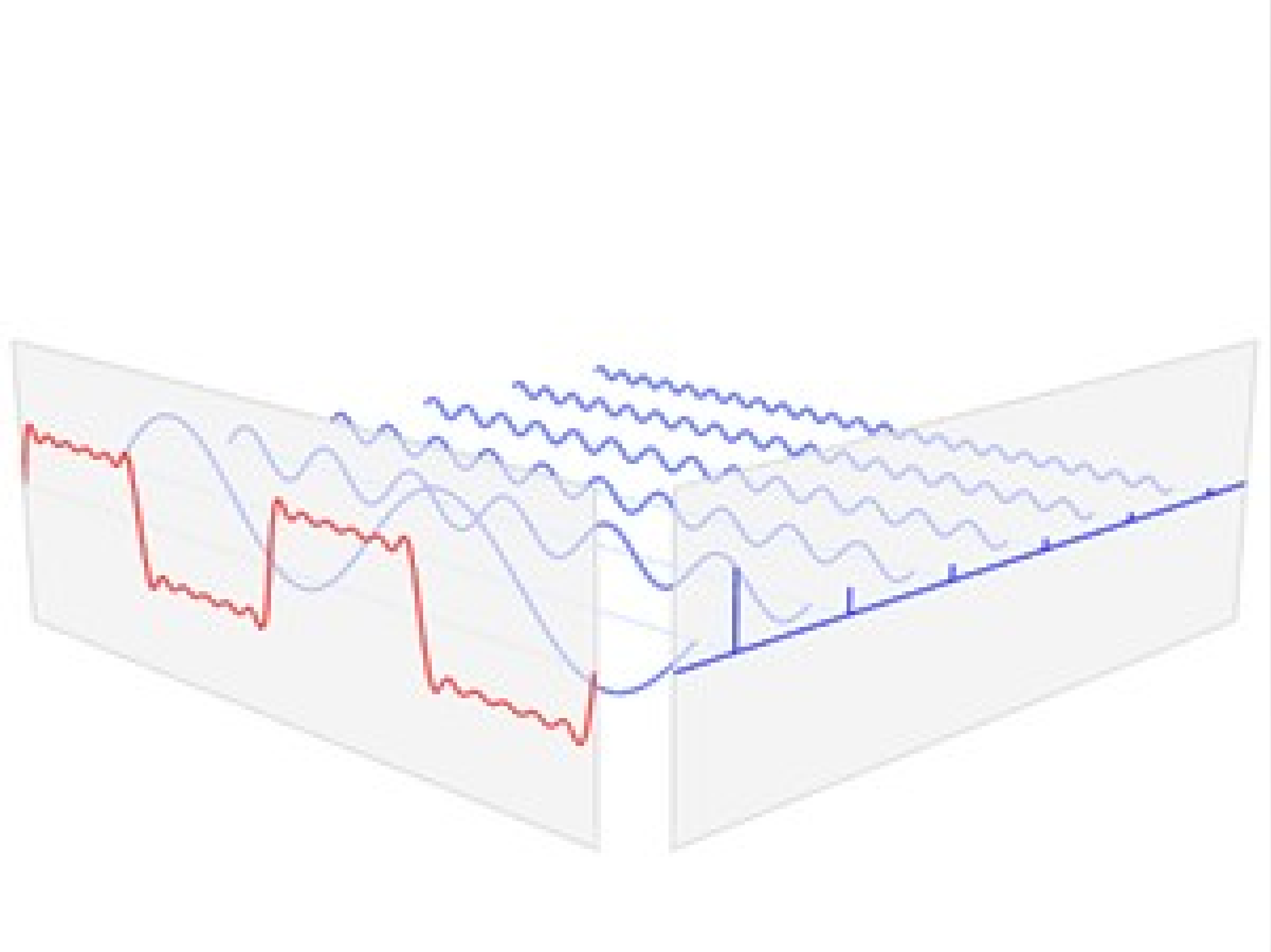


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

Essa função é a soma das quatro funções acima.



- Mesmo funções não periódicas, mas cuja área sob a curva é finita, podem ser expressas como integral de senos e /ou cossenos multiplicados por uma função peso. A formulação neste caso é a transformada de Fourier.
- Ambas as representações compartilham uma importante característica de que podem ser reconstruídas completamente usando um processo inverso.
- O advento dos computadores digitais e a formulação do algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT) no início dos anos 1960 revolucionaram o campo de processamento de imagens e sinais.

- CONCEITOS PRELIMINARES

  - Números complexos: Um número complexo C é definido como

$$C = R + jI$$

onde R e I são números reais e j é um número imaginário igual a raiz quadrada de -1, ou seja, $j = \sqrt{-1}$.

- O conjugado de um número complexo C, denotado C*, é definido como

$$C^* = R - jI$$

  - As vezes representamos os números complexos em coordenadas polares

$$C = |C| (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

onde $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$

- Usando a fórmula de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j sen\theta$

temos a representação familiar em coordenadas polares

$$C = |C| e^{j\theta}$$

SÉRIE DE FOURIER

- Como anteriormente descrito, uma função f(t) de uma variável contínua t que é periódica com período T, pode ser expressa como a soma de senos e cossenos multiplicados por coeficientes apropriados. Essa soma, chamada série de Fourier, tem a forma $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\,dt \qquad para \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

são os coeficientes.

Transformada de Fourier Unidimensional

- A transformada de Fourier de uma função continua unidimensional ***f(x)*** é denotada por:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux]dx \quad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1}$$

- A partir de F(u) pode se obter f(x) a través da **transformada inversa**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi ux]du$$

Transformada de Fourier Bidimensional

- A transformada de Fourier de uma função bidimensional ***f(x,y)*** é denotada por:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\left[-j2\pi(ux+vy)\right]dxdy$$

- A partir de F(u,v) pode se obter f(x,y) a través da **transformada inversa**

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp\left[j2\pi(ux+vy)\right]dudv$$

Transformada de Fourier

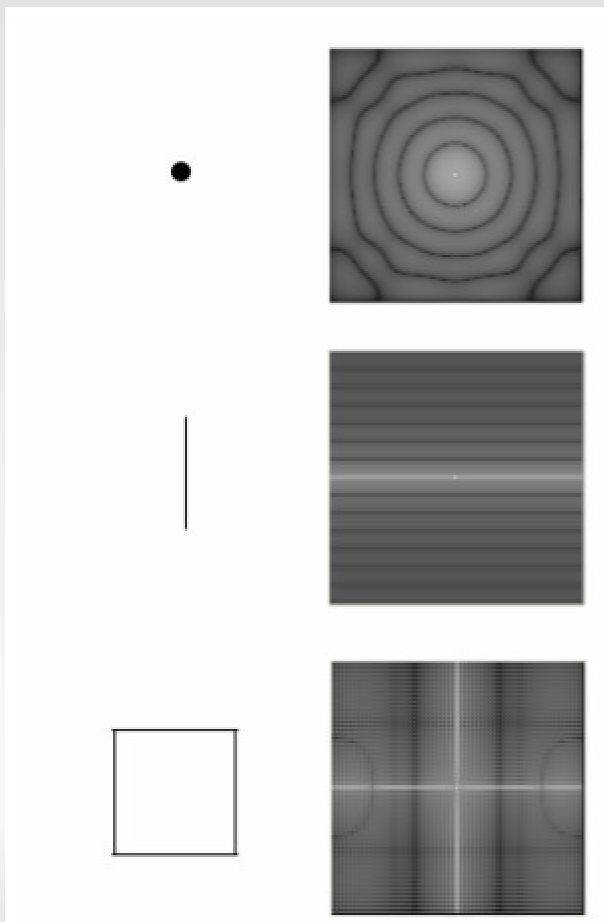
- Nos permite ter uma visão da imagem a ser analisada no domínio da frequência, facilitando sobremaneira esta análise e o seu processamento, normalmente, aplicando-se técnicas de filtragem digital.
- Na prática, a utilização de algoritmos para execução rápida das transformadas de Fourier (FFT) juntamente com os teoremas de convolução e da correlação permitem, de maneira simplificada, a implementação das técnicas de filtragens para eliminação de ruídos e interferências das imagens (ou de uma maneira geral, sinais) em análise.

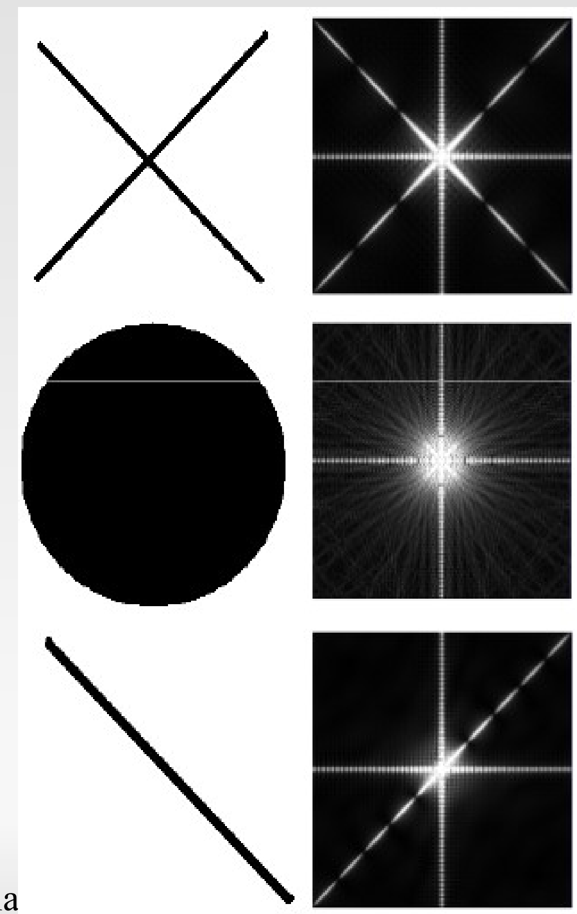
Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier (FT) decompõe um sinal em suas componentes elementares seno e cosseno.
- Quando a FT é aplicada a uma imagem no domínio espacial gera uma informação no domínio da frequência.
- Não há perda de informação durante a mudança de domínios, apenas a informação esta representada de outra forma no domínio da frequência

Exemplos

- Funções bidimensionais (esquerda) e seus espectros de Fourier (direita)





Frequencias altas e baixas

Lembrando

- **Altas frequências:** Variações abruptas na imagem. Ex:detalhes de imagens, bordas, ruídos.
- Quando aplicamos um filtro passa altas, as bordas, detalhes e ruídos são acentuados
- **Baixas frequências:** Restante da imagem (que não contem as variações abruptas da imagem).
- Quando aplicamos um filtro passa baixas, obtemos uma imagem menos nítida ou suavizada(perda de detalhes)

Espectro de Fourier

- No espectro de Fourier, a presença de componentes em regiões próximas ao origem indica baixas frequências
- Consequentemente, informações em regiões afastadas da origem representam a presença de altas frequências

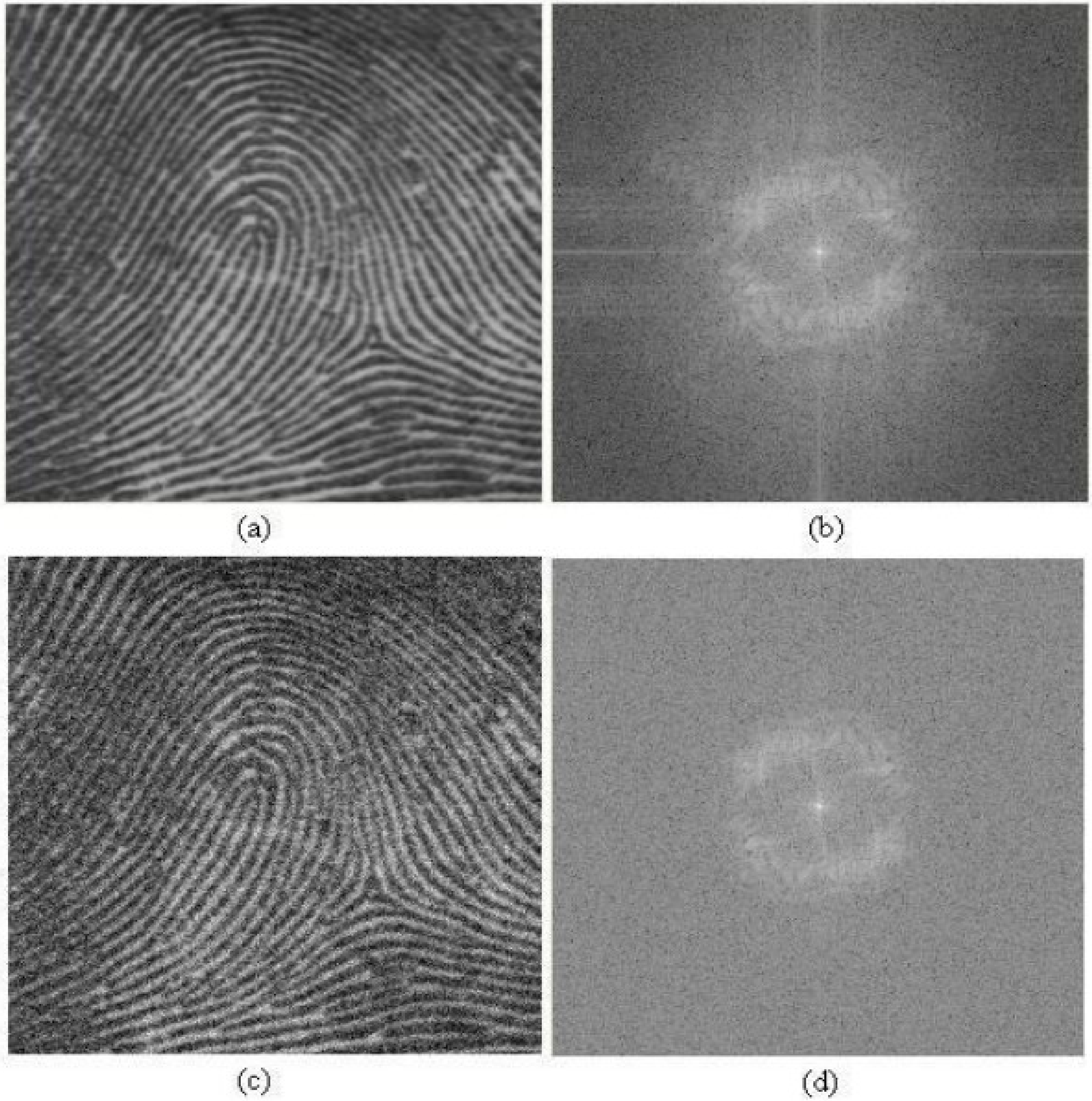


Figura 1 Comparação do espectro de Fourier de imagens de impressão digital sem ruído e com ruído

A e b → img sem ruido e seu espectro de Fourier

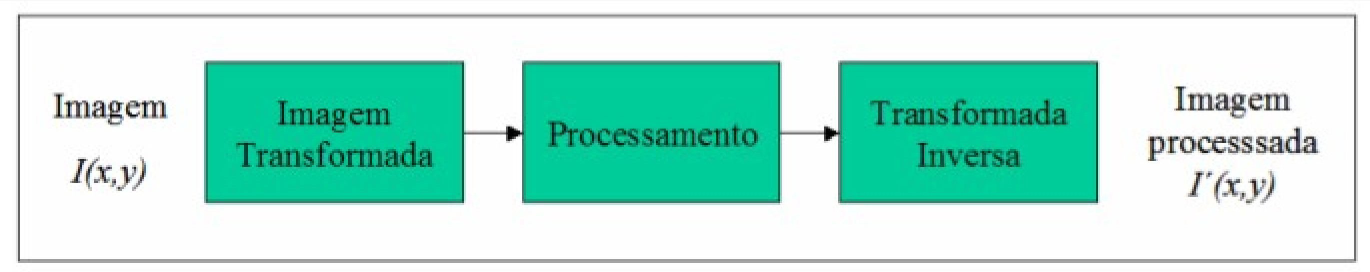
c e d → img com ruido (salt and pepper) e seu espectro de Fourier.

Espectro de Fourier

- Observando o espectro de Fourier das duas imagens é fácil **perceber** a presença dos **ruídos** representados pelas altas frequências na imagem, ou seja, as informações que estão mais afastadas da origem.
- As baixas frequências estão na origem do espectro
- Podemos realizar operações no espectro de Fourier para tratarmos as imagens.

Processamento de Imagens no domínio da Frequência

1. a imagem é transformada do domínio espacial para o domínio da frequência usando a transformada de Fourier;
2. operações são realizadas nessa imagem (por exemplo convolução com um operador linear);
3. para que a imagem possa ser exibida e vista por olhos humanas, ocorre o processo inverso, onde a imagem no domínio da frequência é transformada para o domínio espacial



Filtragem no Domínio da Frequência

- A base matemática das técnicas de filtragem no domínio de frequência é o teorema da convolução.
- Seja g(x,y) a imagem formada pela convolução (*) da imagem f(x,y) com um operador linear h(x,y)

$$\mathbf{g}(x,y) = \mathbf{f}(x,y) * \mathbf{h}(x,y)$$

- No domínio da frequência, a relação a seguir é satisfeita pelo teorema da convolução,

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$$

- ONDE G , F e H são os resultados obtidos pela aplicação da transformada de Fourier nas imagens **g, f e h,** respectivamente.
- Na terminologia de sistemas lineares, a transformada H(u, v) é denominada função de transferência do filtro.

Filtragem no Domínio da Frequência

- O problema consistem em definir uma função ***H(u,v)*** que conduza à obtenção da imagem desejada G(u,v)
- A transformada inversa, $\boldsymbol{F^{-1}}$ ***{G (u, v)}***, define a imagem filtrada no domínio espacial ***g(x, y)***.

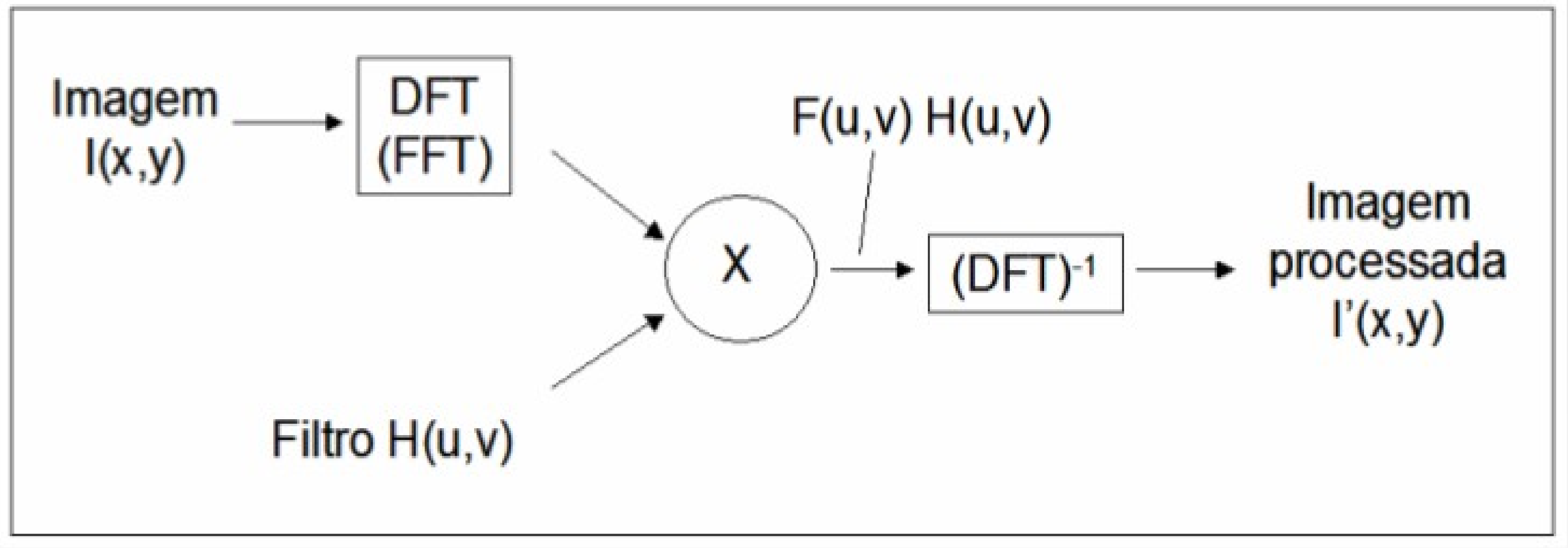


Imagem
I(x,y)
DFT
(FFT)
F(u,v) H(u,v)
X
(DFT)-1
Imagem
processada
I'(x,y)
Filtro H(u,v)

Filtros

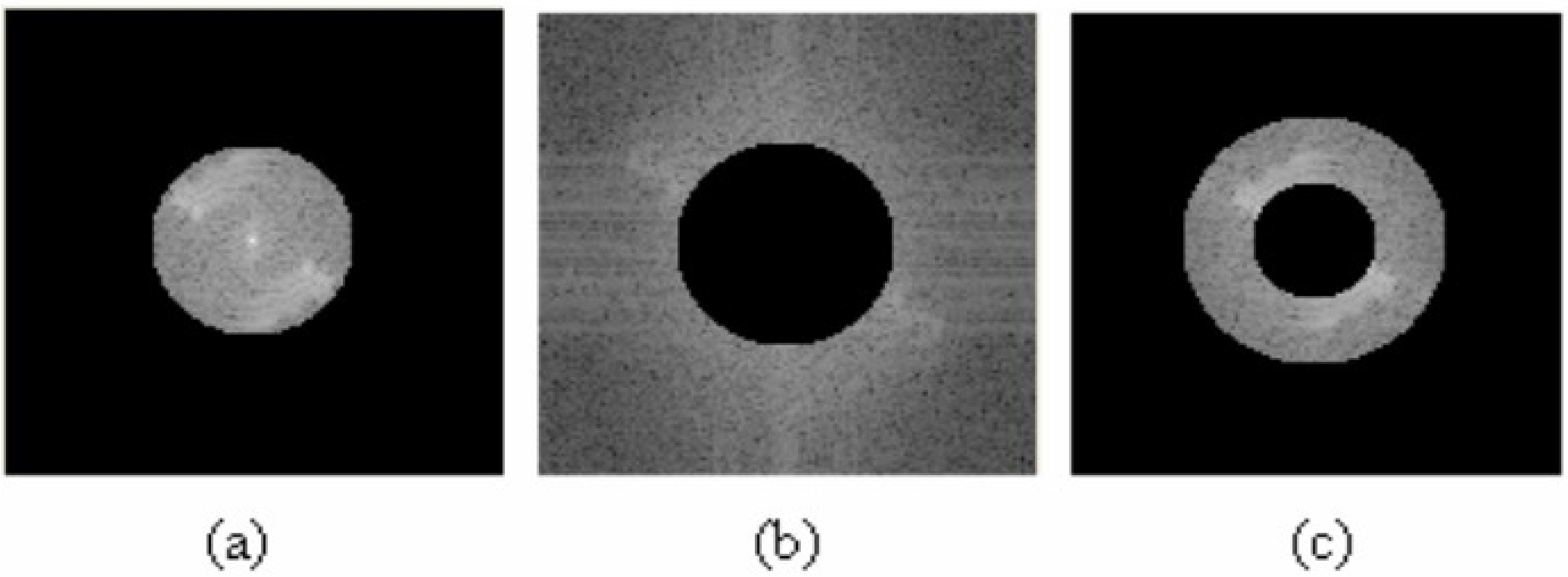
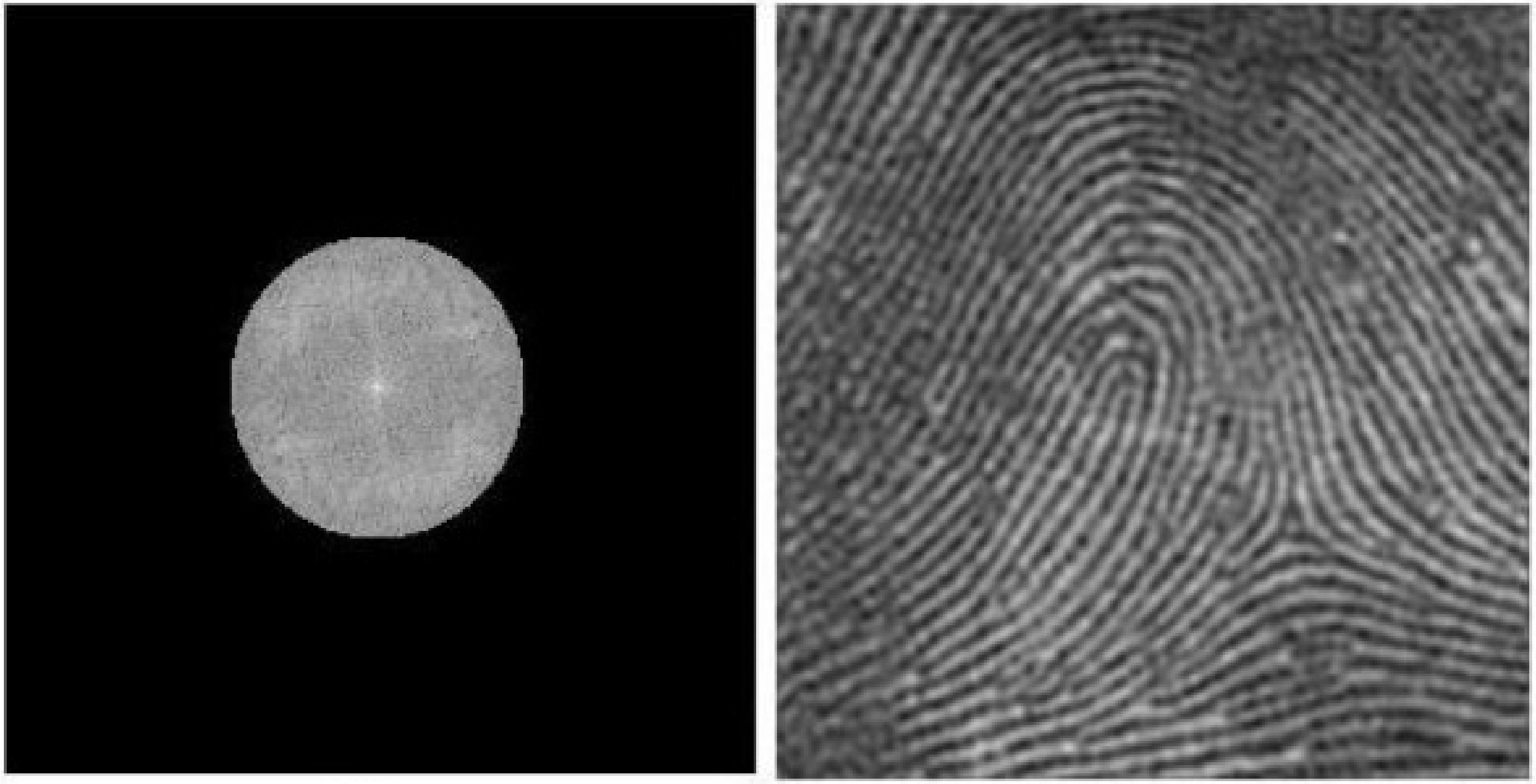


Figura 9 (a) Filtro passa baixa, (b) Filtro passa alta e (c) Filtro passa banda

Filtro Passa Baixas



(a) (b)

Filtro Passa-Baixas

- Deixa passar as baixas frequências e reduze os componentes de alta frequência.
- Quando aplicamos um filtro passa baixas, obtemos uma imagem menos nítida ou suavizada (perda de detalhes)
- Um filtro passa-baixa **ideal** pode ser representado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ se } D(u,v) \leq D_0 \\ 0, \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

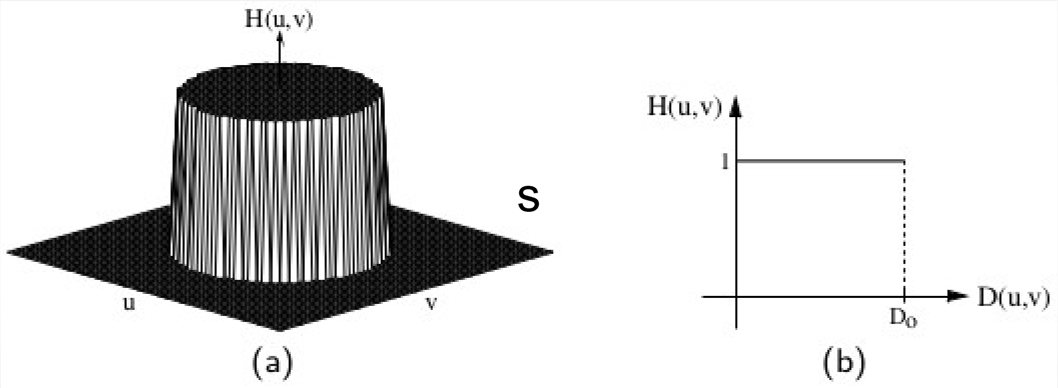
Onde:
D_0 define a frequencia de corte medida desde a origem
D(u,v) é a distância do ponto (u,v) até a origem:

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

- Esse filtro é **ideal** pois todas as frequências dentro do círculo de raio **D_0** são passadas sem atenuação e todas as frequências fora do círculo são retidas completamente.
- O ponto de transição entre dentro do circulo e fora do circulo é chamado de frequência de corte.

Filtro Passa-Baixas

- Os filtros considerados aqui são radialmente simétricos com respeito à origem.
- A especificação de filtros radialmente centrados é baseada na hipótese de que a origem da transformada de Fourier está centrada.
- O gráfico em perspectiva e a seção transversal de um filtro passa-baixa são:

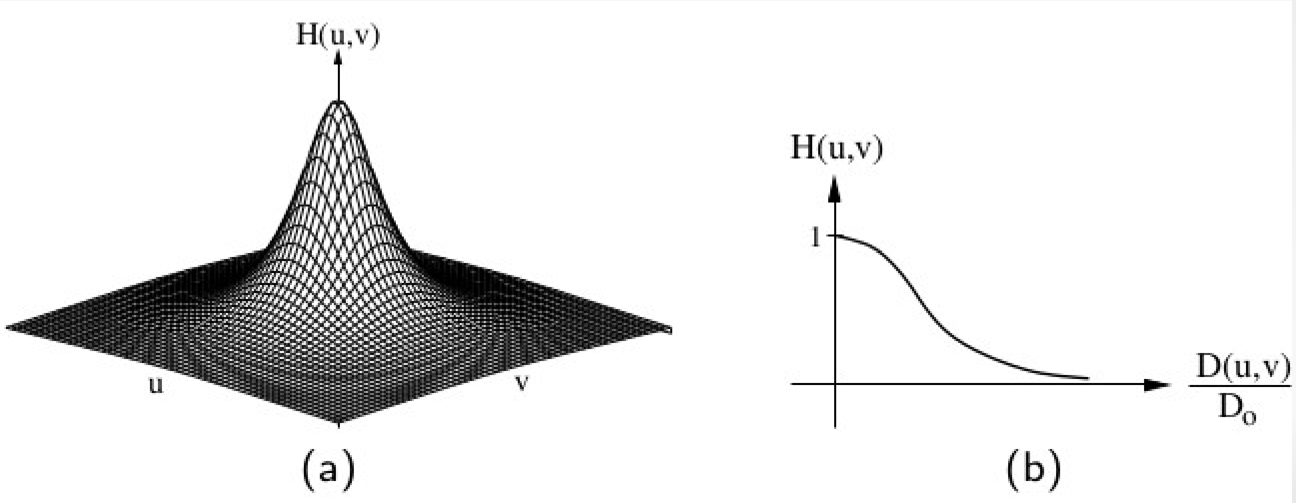


Filtro Passa-Baixas

- O filtro passa-baixa de **Butterworth** de ordem n é dado pela função de transferência

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

- Essa função define um filtro que não apresenta transição abrupta na frequencia de corte como ocorre com o filtro passa baixa ideal



Filtro Passa-Altas

- Deixa passar as altas frequências (transições abruptas).
- Quando aplicamos um filtro passa altas, os componentes de alta frequência da transformada de Fourier não são alterados, enquanto os de baixa frequência são removidos. Isto faz com que os detalhes finos (bordas, ruídos, etc) da imagem sejam enfatizados.
- Operação contrária à filtragem passa baixas.
- Um filtro passa-alta **ideal** pode ser representado por:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, \text{ se } D(u,v) \leq D_0 \\ 1, \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

Onde:

D_0 define a frequência de corte medida desde a origem

D(u,v) é a distância do ponto (u,v) até a origem:

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Filtro Passa Altas

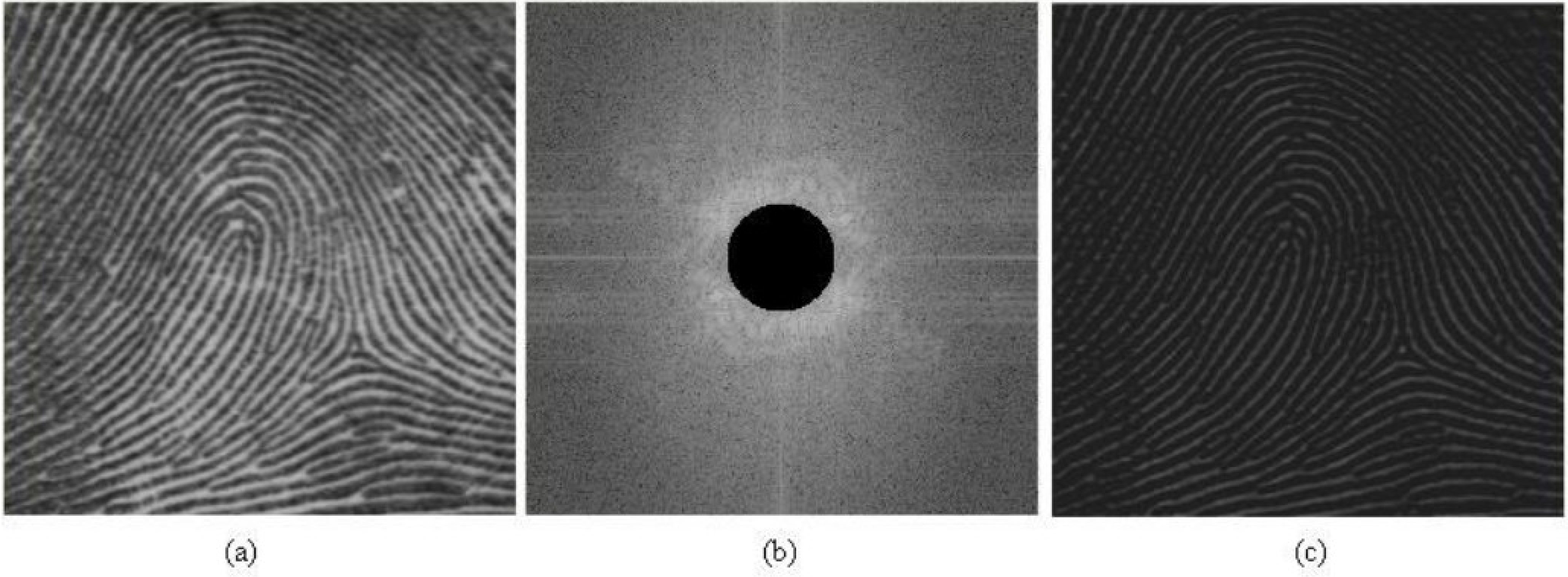
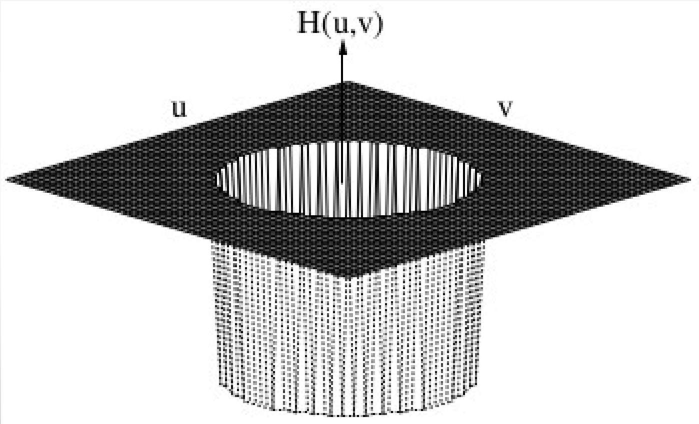


Figura 12 Resultado da filtragem passa alta



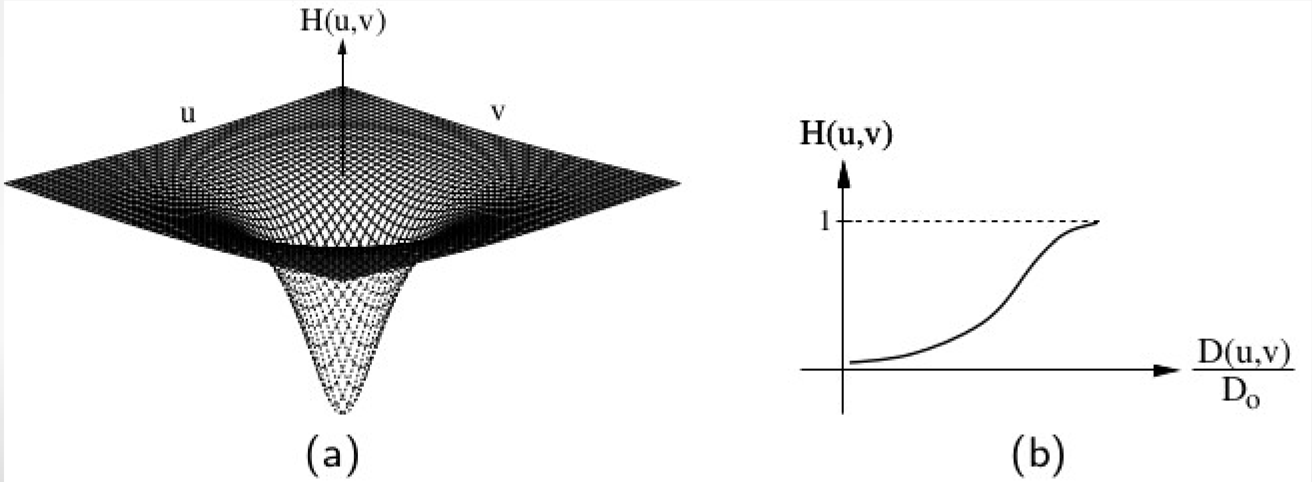
Filtro Passa-Altas

- O filtro passa-baixa de **Butterworth** de ordem n é dado pela função de transferência

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

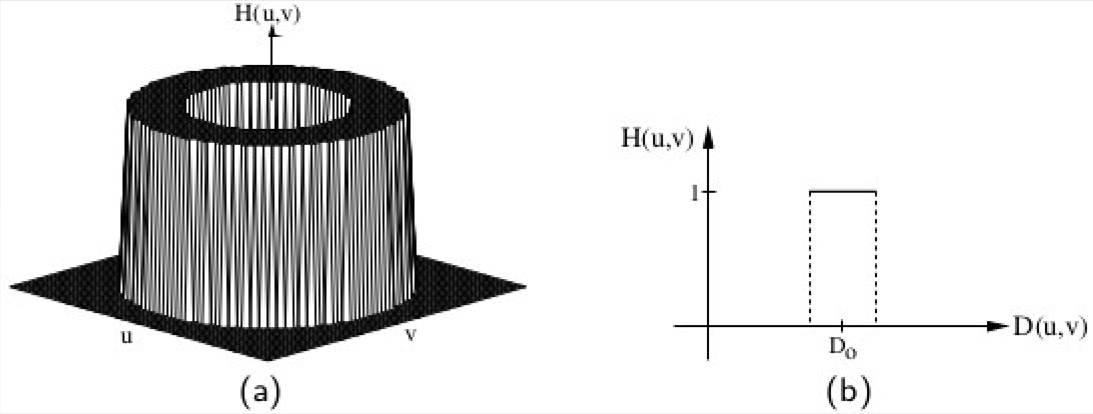
- $$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

- Essa função define um filtro que não apresenta transição abrupta na frequência de corte como ocorre com o filtro passa baixa ideal

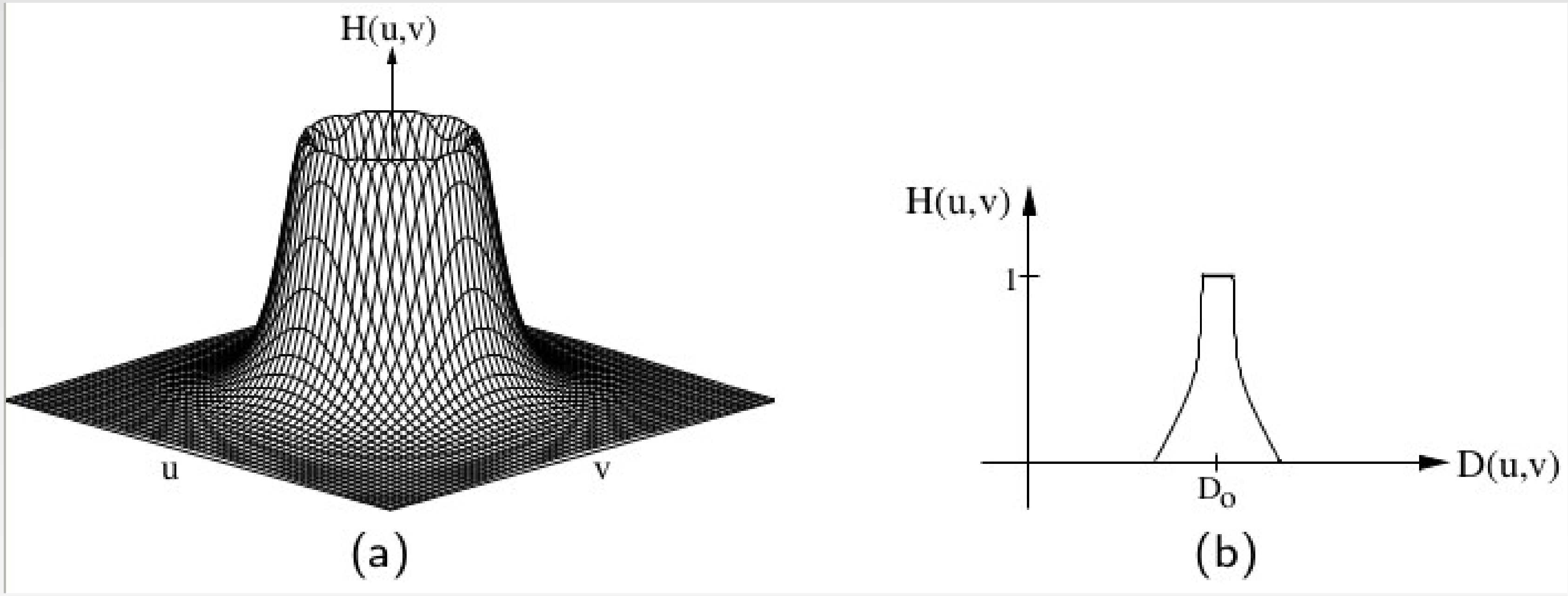


Filtro Passa-Faixa

- Um filtro passa-faixa permite a passagem das frequências localizadas em uma faixa ou banda específica, enquanto atenua ou completamente suprime todas as outras frequências.



- O filtro passa-faixa de **Butterworth** de ordem n é representado pela figura a seguir:



Bibliografia

- PEDRINI, H. e SCHWARTZ, W. R., "Análise de Imagens Digitais", São Paulo, Thomson, 2008, 508p e slides.
- FALCÃO, A. (http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mo443/)
- Wilhelm BURGER e Mark James BURGE. Digital Image Processing, An Algorithmic Introduction using Java.
- GONZALEZ e WOODS. Processamento de Imagens Digitais, Segunda edição.

Várias imagens foram extraídas do material mencionado acima com fines didáticos.