Transformações Geométricas

Prof. Alexandre Xavier Falcão

Aula 05 - Parte I

1 Introdução

Uma transformação geométrica é uma função que mapeia um ponto (ou vetor)— e.g., (x_1, y_1, z_1)— em um outro ponto (ou vetor)— e.g., (x_2, y_2, z_2)— do espaço afim [1]. No nosso caso, os pontos são os centros dos spels.

As transformações afins mais comuns são: rotação, escalamento, translação, e projeção.

Estas transformações são obtidas por uma multiplicação entre matrizes, com exceção da translação.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Para combinar essas transformações usando apenas multiplicações entre matrizes, nós representamos os pontos em coordenadas homogêneas. A translação fica.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 Rotação em torno do eixo z

Seja $\vec{V} = (0, 0, 1, 1)$ o vetor que representa o eixo z com origem em $(0, 0, 0, 1)$, a rotação em torno de z (Figura 2) modifica apenas as coordenadas x e y dos pontos, seguindo a regra da mão direita [2]. Esta rotação é em torno da origem e do vetor $\vec{V}$.

[1] É o espaço vetorial incluindo os pontos, onde as operações podem envolver vetores e pontos.

[2] Polegar direito na direção e sentido de $\vec{V}$, e os demais dedos giram para dentro da mão.

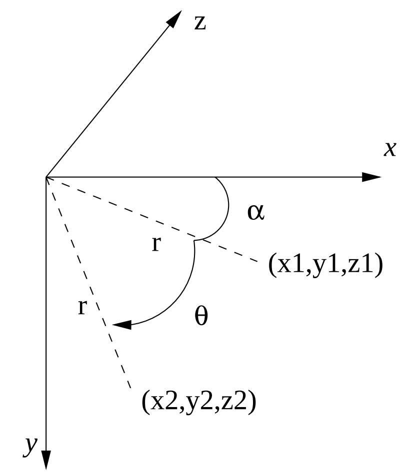

Figura 1: Rotação de θ em torno de z.

Esta rotação é representada por uma matriz $\mathbf{R_z}(\theta)$ obtida das equações abaixo.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\alpha) \\
y_1 &= r\sin(\alpha) \\
x_2 &= r\cos(\theta+\alpha) \\
x_2 &= r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\
x_2 &= x_1\cos(\theta) - y_1\sin(\theta) \\
y_2 &= r\sin(\theta+\alpha) \\
y_2 &= r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \\
y_2 &= x_1\sin(\theta) + y_1\cos(\theta) \\
z_2 &= z_1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Rotações em torno dos eixos x e y

As rotações em torno dos eixos x e y são obtidas de forma similar.

$$\mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_y}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note apenas que o sinal dos senos está trocado em $\mathbf{R_y}(\theta)$, porque a rotação é no sentido inverso da regra da mão direita.

4 Rotação em torno de ponto e eixo arbitrários

Para rotacionar um objeto em torno da origem, nós aplicamos a matriz de rotação para todos os pontos do objeto. Normalmente, porém, desejamos rotacionar o objeto em torno do seu centro de gravidade. Neste caso, o objeto deve ser transladado para que seu centro de gravidade fique na origem do sistema, aplicamos a rotação e depois transladamos de volta o objeto para a posição inicial. Por exemplo, a rotação $\mathbf{R}_x(\theta)$ de um ângulo θ em torno do vetor $\vec{V} = (1, 0, 0, 1)$ e do centro de gravidade do objeto é dada pela transformação abaixo aplicada a cada voxel $(x_1, y_1, z_1, 1)$ do objeto.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t'_x \\ 0 & 1 & 0 & -t'_y \\ 0 & 0 & 1 & -t'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $(t_x, t_y, t_z, 1) = (-x_c, -y_c, -z_c, 1)$ é o negativo das coordenadas $(x_c, y_c, z_c, 1)$ do centro de gravidade do objeto. Estas coordenadas são obtidas pela média aritmética das coordenadas correspondentes de todos os pontos do objeto. Note que a rotação do objeto em torno do seu centro pode fazer com que ele caia fora do domínio da imagem. Para evitar isso, a translação de volta pode ser $t'_x = t'_y = t'_z = -D/2$, onde D é a diagonal da imagem 3D e o domínio da imagem resultante deve ser maior, com $D \times D \times D$ voxels.

Suponha agora uma rotação de ângulo θ em torno de um vetor $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z, 1)$, onde $|\vec{V}| = 1$, e ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0, 1)$ arbitrários. Seja $\mathbf{T}(-p_0)$ a matriz de translação que define um novo sistema com origem no ponto p_0 (i.e., $(t_x, t_y, t_z, 1) = (-x_0, -y_0, -z_0, 1)$). A idéia é aplicar esta translação, alinhar o vetor $\vec{V}$ com um dos eixos (e.g., o eixo z), rotacionar de θ em torno deste eixo, inverter o alinhamento e aplicar a translação $\mathbf{T}(p_0)$ de volta ao sistema original. Seja z o eixo escolhido, o alinhamento de $\vec{V}$ com o vetor $(0, 0, 1, 1)$ requer rotação em torno do eixo x e depois em torno do eixo y conforme a Figura 2.

Lembrem que a inversa $\mathbf{R^{-1}}$ de qualquer matriz de rotação é a sua transposta $\mathbf{R^t}$ [3] e que a inversa da multiplicação $(\mathbf{R_1 R_2})^{-1}$ entre duas matrizes é $\mathbf{R_2}^{-1}\mathbf{R_1}^{-1}$. A operação desejada

[3]Pois a inversa de uma rotação θ é a rotação $-\theta$. Ao substituir θ por $-\theta$ na matriz de rotação, vamos observar que o resultado é a sua transposta.

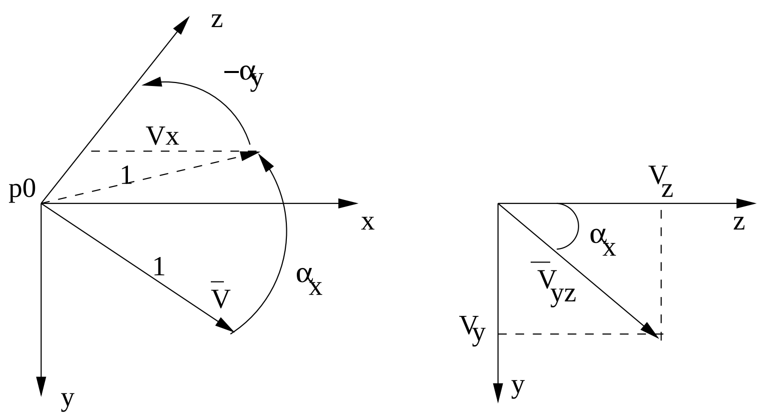

Figura 2: A rotação α_x em torno de x, seguida da rotação $-\alpha_y$ em torno de y, alinha o vetor $\vec{V}$ com o eixo z (à esquerda). A projeção $\vec{V}_{yz}$ de $\vec{V}$ no plano yz forma o mesmo ângulo α_x com o eixo z (à direita).

pode ser escrita como:

$$\mathbf{T}(p_0)\mathbf{R_x^t}(\alpha_x)\mathbf{R_y^t}(-\alpha_y)\mathbf{R_z}(\theta)\mathbf{R_y}(-\alpha_y)\mathbf{R_x}(\alpha_x)\mathbf{T}(-p_0) \quad (1)$$

ou ainda, como:

$$\mathbf{T}(p_0)\mathbf{R_x}(-\alpha_x)\mathbf{R_y}(\alpha_y)\mathbf{R_z}(\theta)\mathbf{R_y}(-\alpha_y)\mathbf{R_x}(\alpha_x)\mathbf{T}(-p_0) \quad (2)$$

A questão é quais são os parâmetros das matrizes $\mathbf{R_y}(.)$ e $\mathbf{R_x}(.)$? Note pela Figura 2 que:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_x) &= \frac{V_y}{V_z} \\ \tan(\alpha_y) &= \frac{V_x}{V_z}. \end{aligned}$$

Note que, quando $V_z = 0$, as equações acima necessitam de tratamento especial. Isto é, se $V_x = 0$, então $\alpha_y = 0$, e se $V_x \neq 0$, então $\alpha_y = 90$. O mesmo se aplica a α_x. Isto é, se $V_y = 0$, então $\alpha_x = 0$, e se $V_y \neq 0$, então $\alpha_x = 90$.

5 Escalamento

Fatores s_x, s_y e s_z podem ser aplicados às coordenadas dos pontos para aumentar/reduzir o tamanho do objeto, ou mesmo refletir o objeto com relação a um dos planos de coordenadas.

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatores maiores que 0 e menores que 1 ocasionam redução de tamanho, fatores maiores que 1 ocasionam aumento, e fatores menores que 0 ocasionam reflexão. A inversa $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z)$ é $\mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$.

6 Projeção 3D para 2D

A projeção é uma mudança de sistemas de coordenadas (x, y, z) para um novo sistema (u, v, n), onde (u, v) define um plano de visualização e n é o eixo perpendicular a este plano. O plano de visualização contém a região da imagem projetada, a qual é apresentada na tela.

A projeção é obtida expressando as coordenadas de um sistema em relação ao outro. Para simplificar, vamos considerar a projeção ortogonal [4] entre os sistemas da Figura 3. Neste caso, a projeção ortogonal de um ponto com coordenadas (x_1, y_1, z_1) no plano de visualização é dada por $u = x_1$, $v = y_1$, e $n = 0$.

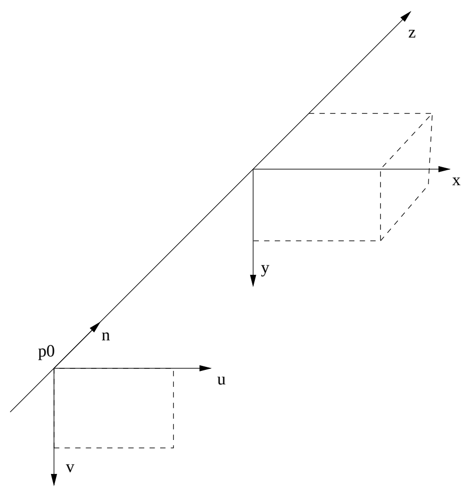

Figura 3: Sistemas de coordenadas da imagem 3D (x, y, z) e do plano de visualização (u, v, n) em $p_0 = (0, 0, -D/2)$ em relação ao (x, y, z), onde D é a diagonal da imagem 3D (para evitar cortes).

Continuamos na próxima aula.

[4] Observador no $z = -\infty$ e raios de projeção paralelos e orgonais ao plano de visualização.