Computação Gráfica

Transformações Geométricas

Professora: Sheila Cáceres

Transformações Geométricas

- Uma transformação geométrica é uma função que mapeia um ponto/vetor (x1, y1, z1) em outro ponto (x2, y2, z2).
- As transformações mais comuns são:
  - Traslação
  - Escala
  - Rotação

Por que usar Matriz nas Transformações?

- Todas as transformações podem ser efetuadas através da multiplicação de matrizes (usando coordenadas homogêneas).
- As transformações podem ser aninhadas e resolvidas de modo a haver apenas uma matriz de multiplicação a ser aplicada.
- A característica descrita acima se torna muito importante quando a mesma seqüência de transformações deve ser aplicada para diversos pontos.

Multiplicação de Matrizes

Lembrando...

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

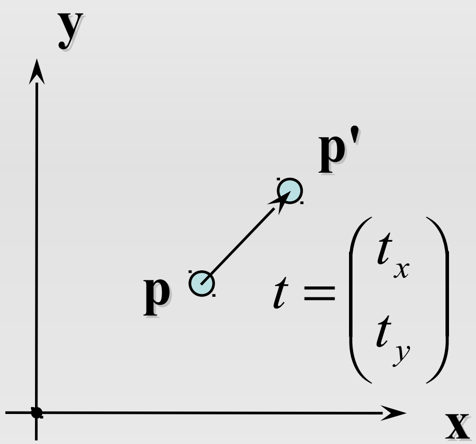
onde:

$$x' = a\ x + b\ y$$

$$y' = c\ x + d\ y$$

Principais transformações

Translação



$$t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$p' = p + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então, geralizando:

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

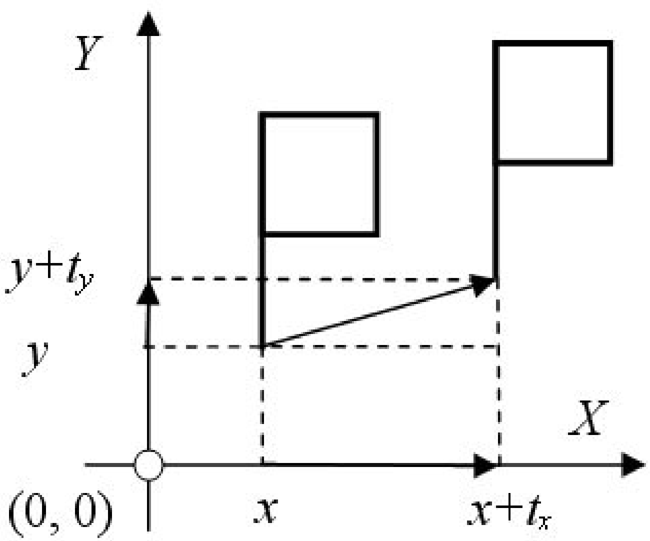


Figura 1: Translação.

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$V' = V + T(t_x, t_y)$ ← Equação matricial p/ a transformação

Traslação

- Porém é útil expressar as transformações usando apenas multiplicações entre matrizes para poder combinar transformações (combina produtos).

$$p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- As equações serão expressas por meio de coordenadas homogêneas para que as transformações possam ser combinadas. Em coordenadas homogêneas um novo componente é adicionado ao ponto.
- A traslação fica:

$$p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Traslação em 3D

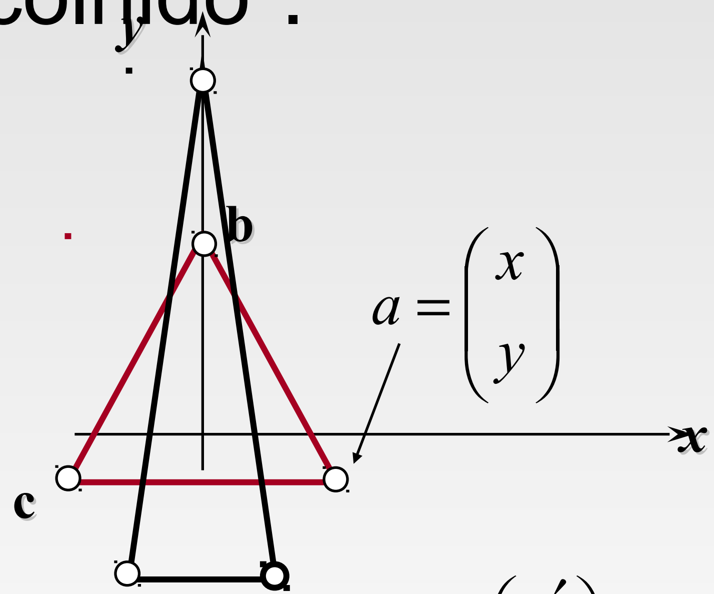
- Também podemos expressar a traslação usando uma matriz de 4x4 em coordenadas homogeneas;

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p} \text{ onde}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Quando se aplica uma transformação de escala a um objeto, o resultado é um novo objeto semelhante ao original, mas "esticado" ou "encolhido".



$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Redução $(0 < s_x < 1)$,
Aumento $(s_y > 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Escala

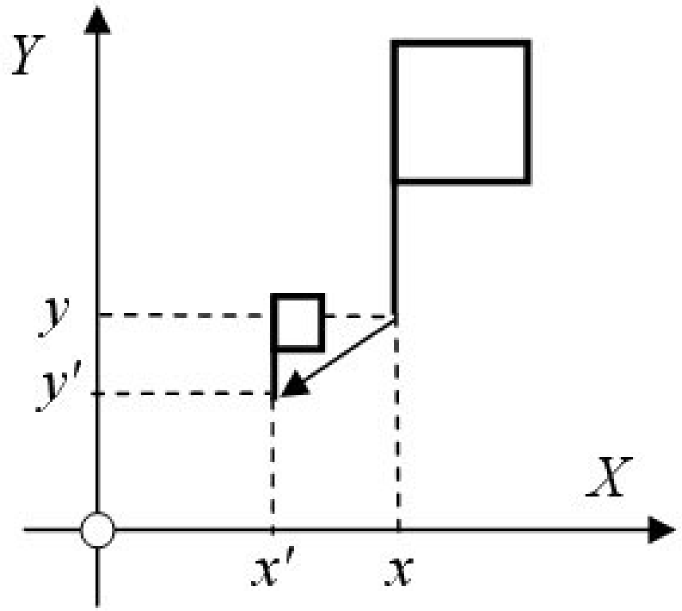


Figura 3: Escala.

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$V' = S(s_x, s_y)V$ ← Equação matricial p/ a transformação

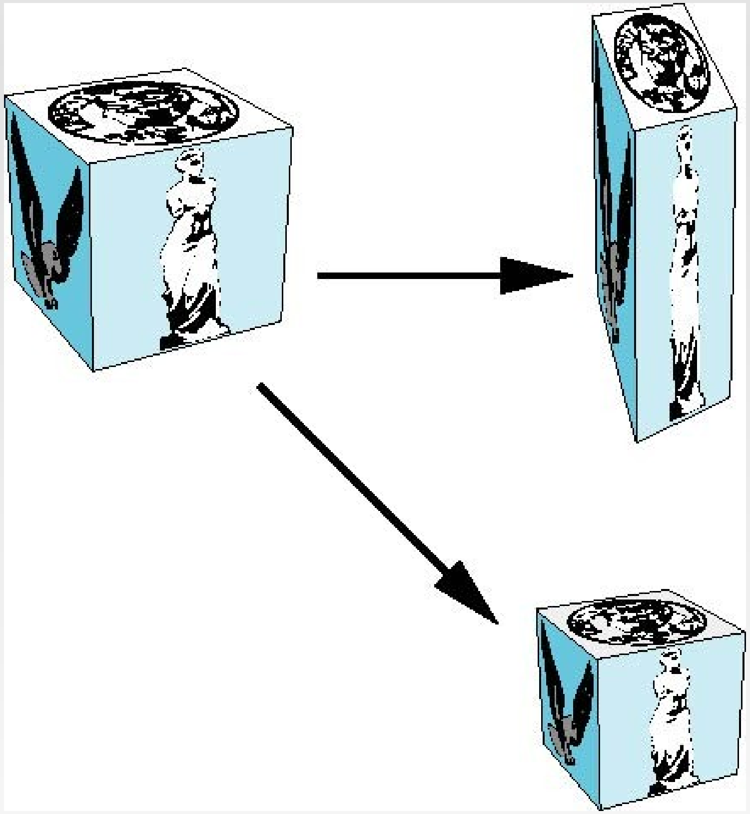
Escala em 3D

Podemos expandir ou encolher objetos ao longo dos eixos

$x' = s_x x$
$y' = s_y x$
$z' = s_z x$

p'=Sp

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

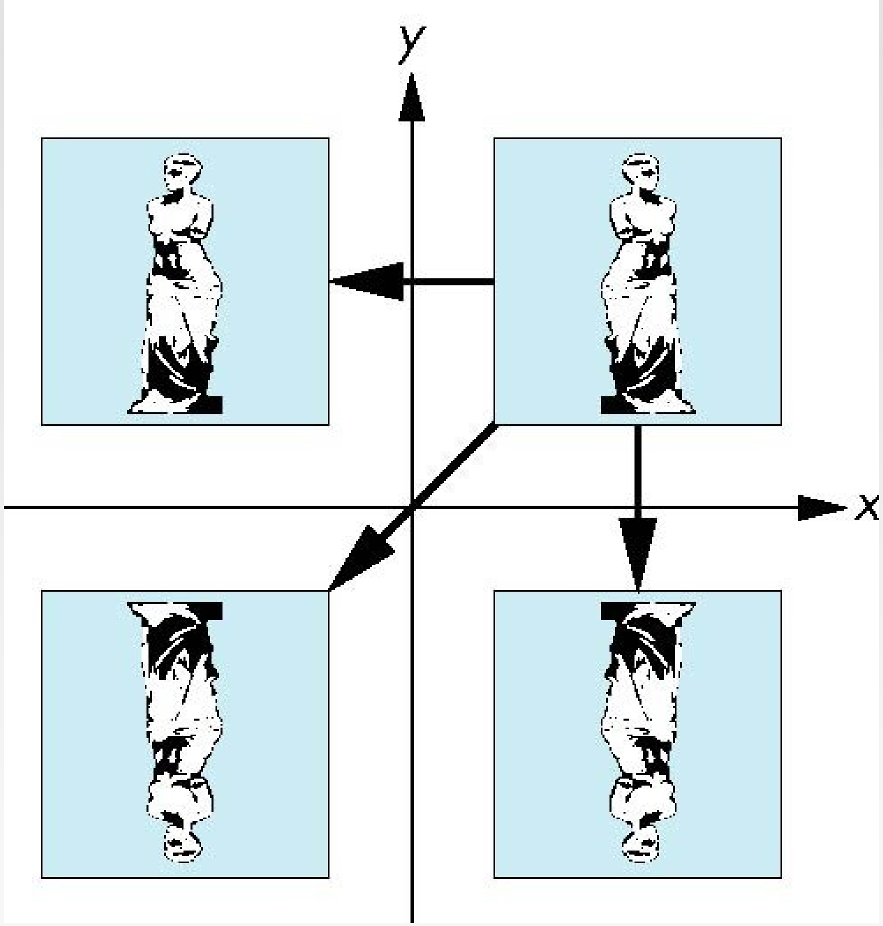


Espelhamento (Reflection)

Corresponde a fatores de escala negativos

$s_x = -1 \; s_y = 1$

original

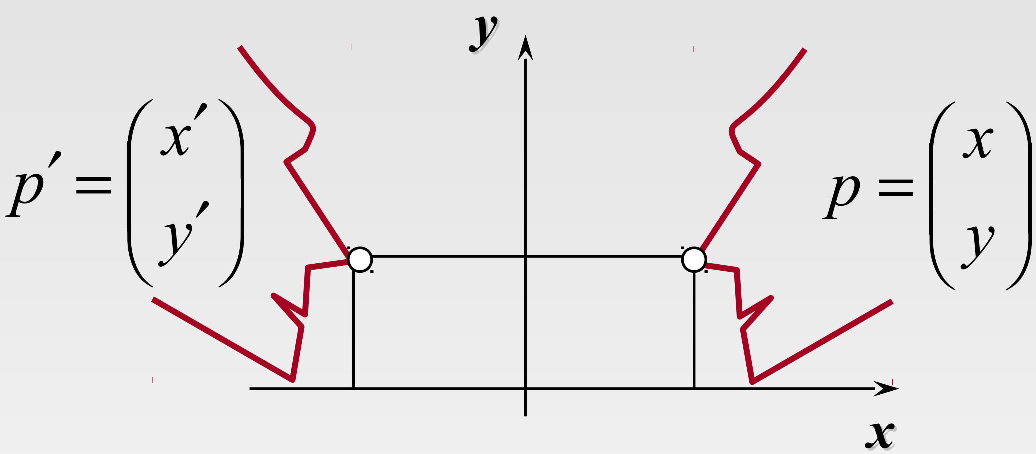


$s_x = -1 \; s_y = -1$

$s_x = 1 \; s_y = -1$

Espelhamento em relação ao eixo y

Podemos dar valores fixos a Sx e Sy e obter diferentes tipos de espelhamento

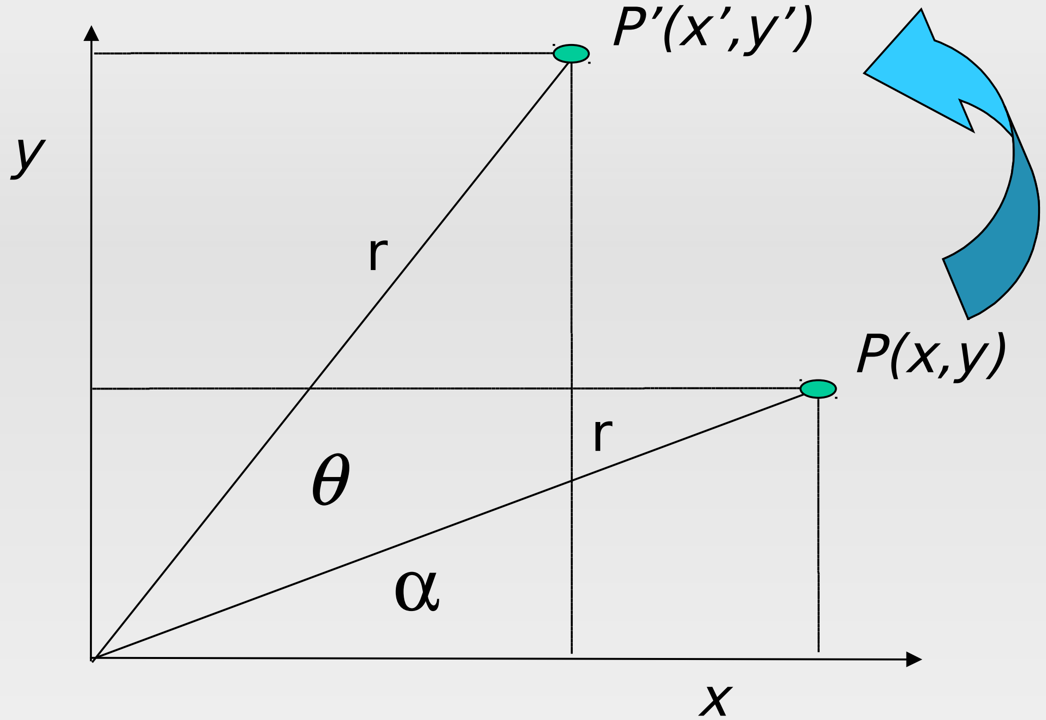


x´ = -1.x
y´ =   y

Espelhamento em relação ao eixo y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotação (2D)



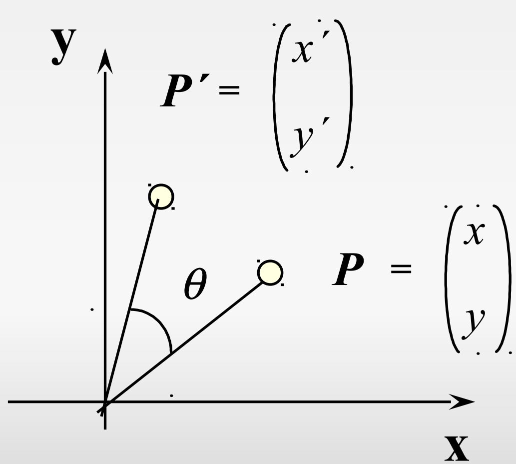
$$x = r.\cos(\alpha)$$
$$y = r.\sin(\alpha)$$

$$x' = r.\cos(\alpha+\theta) = r.\cos(\alpha).\cos(\theta) - r.\sin(\alpha).\sin(\theta)$$
$$y' = r.\sin(\alpha+\theta) = r.\cos(\alpha).\sin(\theta) + r.\sin(\alpha).\cos(\theta)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x.\cos(\theta) - y.\sin(\theta) \\ y' &= x.\sin(\theta) + y.\cos(\theta) \end{aligned}}$$

Rotação

- É o ato de girar um objeto por um dado ângulo, num sistema de referência.
- Um rotação em duas dimensões é aplicada pelo reposicionamento de cada ponto original (calculado) do objeto ao longo de um círculo imaginário no plano xy.
- Logo, deve ser especificado um ângulo de rotação q, que especifica o arco que um dado ponto deve ser deslocado em torno da origem do sistema de referência (0, 0).



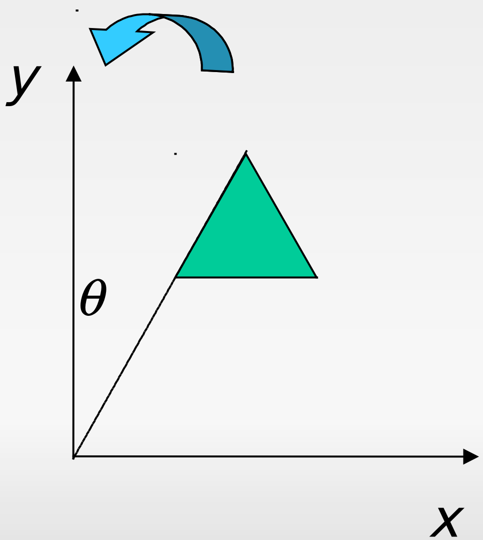
$$x' = x.\cos\,\theta - y.\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y' = x.\mathrm{sen}\,\theta + y.\cos\,\theta$$

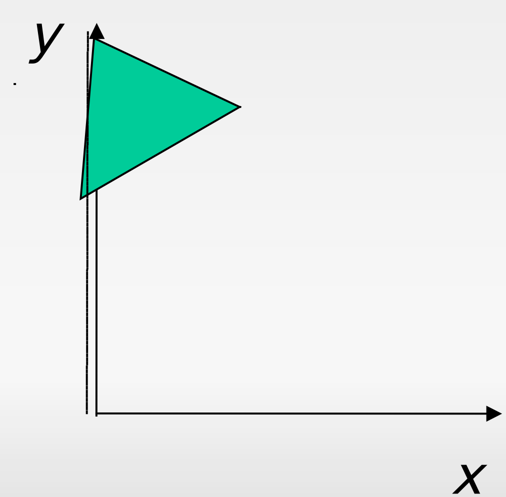
Rotação (2D)

$$P' = R(\theta) * P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x * \cos(\theta) - y * \sin(\theta) \\ y' = x * \sin(\theta) + y * \cos(\theta) \end{cases}$$



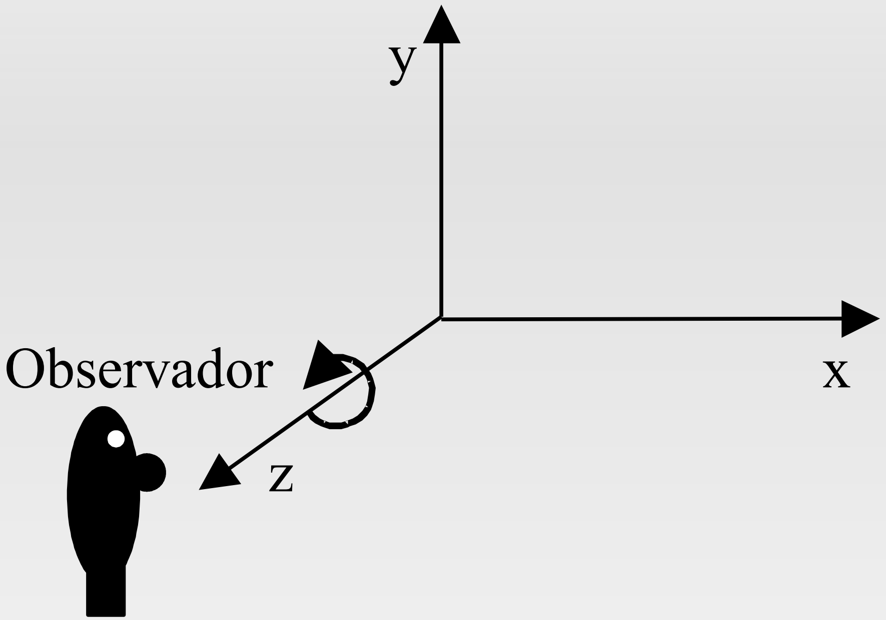


Rotação (eixo z fixo)

*P´= Rz(α)*P* (sentido de x para y)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 & 0 \\ sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos(\alpha) - ysin(\alpha) \\ y' = xsin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ z' = z \end{cases}$$

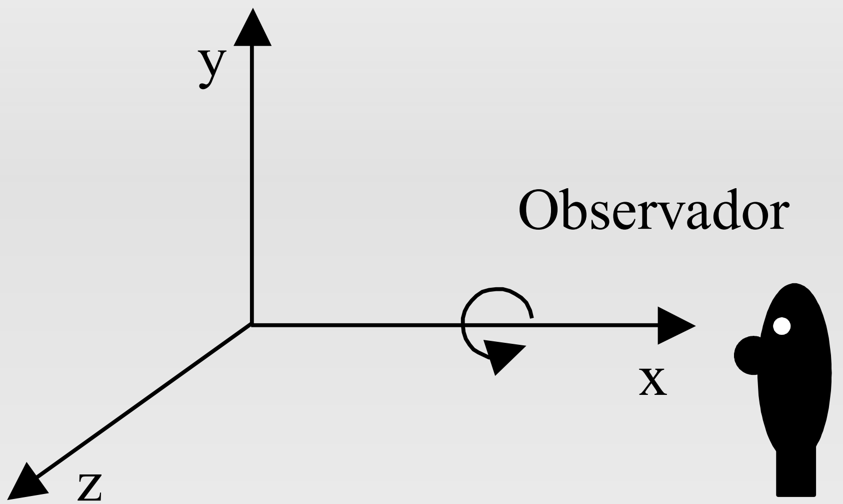


Rotação (eixo x fixo)

$P' = Rx(\alpha)*P$ (sentido de y para z)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos(\alpha) - zsin(\alpha) \\ z' = ysin(\alpha) + z\cos(\alpha) \end{cases}$$

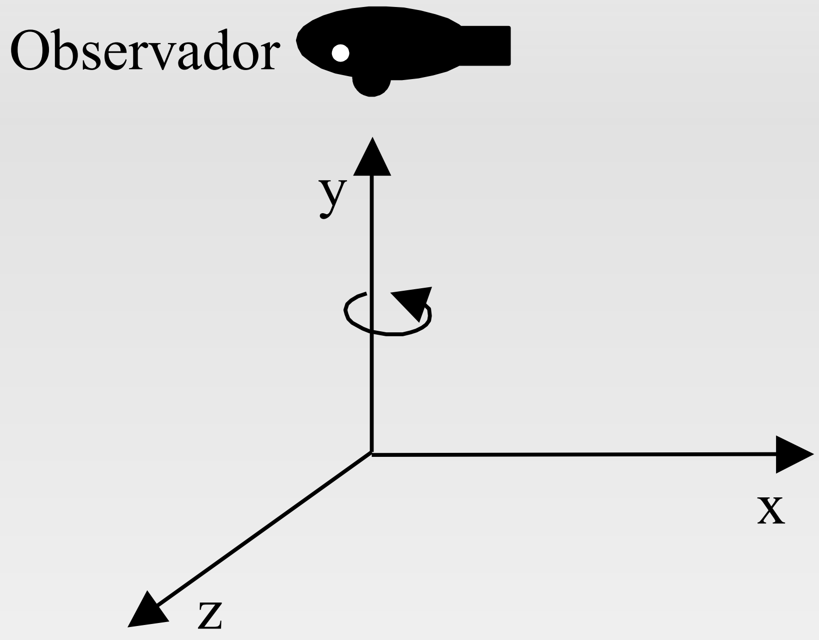


Rotação (eixo y fixo)

*P´= Ry(α)*P* (sentido de z para x)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = zsin(\alpha) + x\cos(\alpha) \\ y' = y \\ z' = z\cos(\alpha) - xsin(\alpha) \end{cases}$$



Resumindo

- As matrices homogenizadas em 2D ficariam.

Transformation	Matrix
Scaling	$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotation	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Note: These transformations are called affine transformations

Examples

- Scaling: Scale by 15 in the x direction, 17 in the y

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation: Rotate by 123°

$$\begin{bmatrix} \cos(123) & -\sin(123) & 0 \\ \sin(123) & \cos(123) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Translation: Translate by -16 in the x direction, +18 in the y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversas

- A pesar de que podemos computar matrices inversas por formulas gerais, podemos usar também observações geométricas.
  - Translation: $\mathbf{T}^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \mathbf{T}(-t_x, -t_y, -t_z)$
  - Rotation: $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$
    - Para qualquer matriz de rotação
    - Note que: $\cos(\boldsymbol{-\theta}) = \cos(\theta)$ and $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

- Scaling: $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$

Concatenação

Podemos obter matrices de transformação arbitrarias (que permitam realizar multiples transformações) pela multiplicação das matrices base : rotação, traslação e escala

- Devido a que a mesma transformação se aplicaria a muitos vertices, o custo de formar uma matriz $\mathbf{M}=\mathbf{ABCD}$ não é significativo comparado com o custo computacional de cada matriz A, B, C, D multiplicado por todos os vértices $\mathbf{p}$

Concatenação de transformações

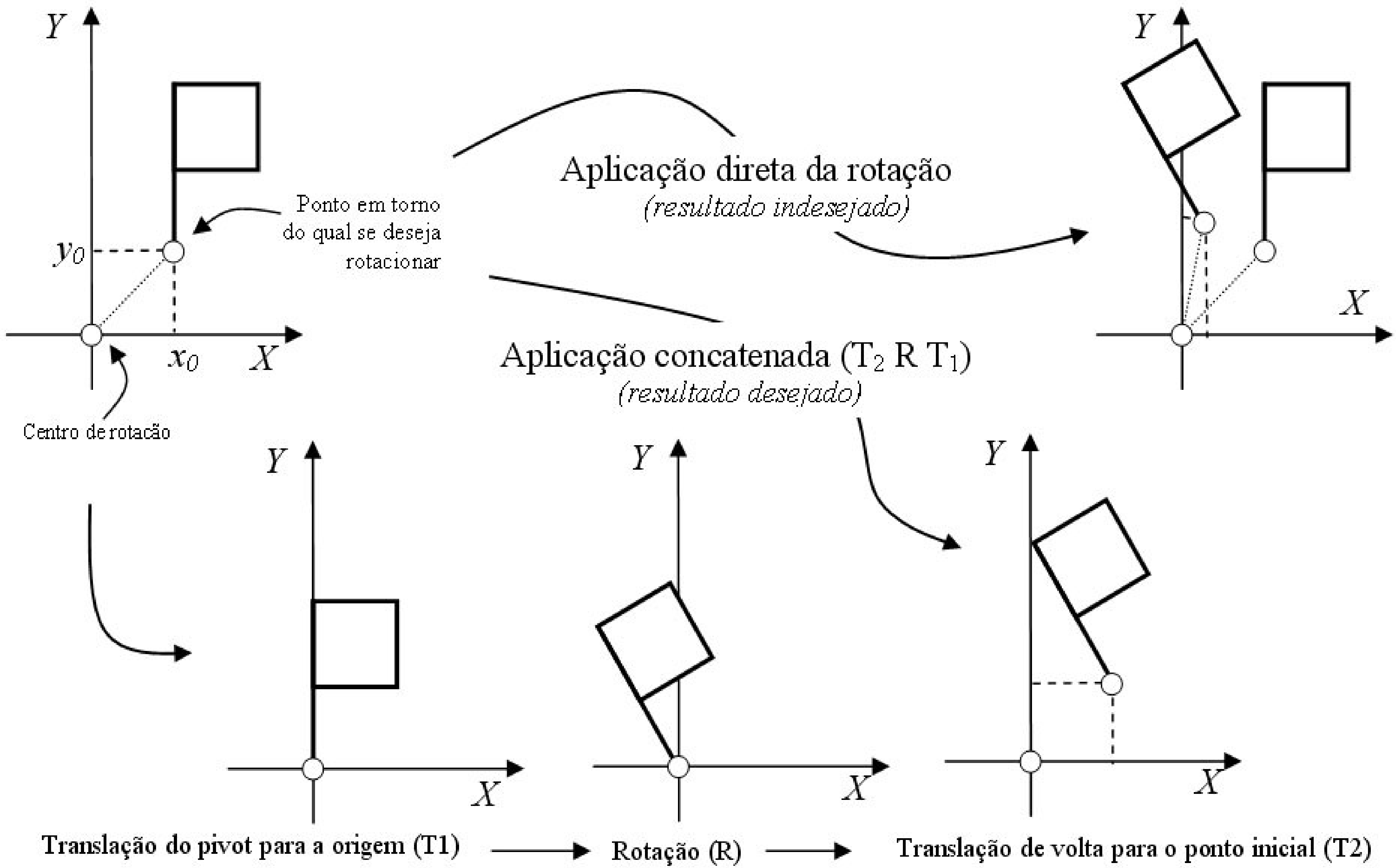


Figura 6. Concatenação de transformações

Ordem das Transformações

- Note que a matriz da direita é a primeira transformação a ser aplicada
- Matematicamente, o seguinte é equivalente

$$\mathbf{p}' = \mathbf{ABCp} = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Cp}))$$

Lembre que o produto de matrizes é associativo:

(AB)C= A(BC)

Lembre também que o produto de matrizes não é comutativo (não pode mudar a ordem dos fatores)